PAP 2.1
Versuch 213: "Kreisel"

Jonas Schweer

3. April 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**
- 1.1 Ziel des Versuchs . . . 2
- 1.2 Versuchsaufbau . . . 2
- 1.3 Physikalische Grundlagen . . . 3
  - 1.3.1 Kräftefreier, symmetrischer Kreisel . . . 3
  - 1.3.2 Schwerer, symmetrischer Kreisel . . . 4

2 Messprotokoll **5**

3 Auswertung **8**
- 3.1 Aufgabe 1 - Vorversuch . . . 8
- 3.2 Aufgabe 2 - Dämpfung des Kreisels . . . 8
- 3.3 Aufgabe 3 - Präzessionszeiten in Abhängigkeit des Winkel . . . 9
- 3.4 Aufgabe 4 - Trägheitsmoment entlang der z-Achse . . . 10
- 3.5 Aufgabe 5 - Beobachtungen bei Nutation . . . 12
- 3.6 Aufgabe 6 - Berechnung von I_x . . . 12
- 3.7 Aufgabe 7 - Erneute Bestimmung von I_x . . . 13

4 Zusammenfassung und Diskussion **14**

5 Anhang **16**

1 Einleitung

Anmerkung: Alle Bilder, welche in diesem Abschnitt verwendet wurden, sind aus dem Praktikumsskript übernommen worden.
Quelle: 'Physikalisches Praktikum PAP2.2 für Studierende der Physik B.Sc' - Jens Wagner, Februar 2025

1.1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch wollen wir das Verhalten eines Kreisels näher untersucht werden. Zuerst wollen wir uns qualitativ das Verhalten des Kreisels näher anschauen. Anschließend Wollen wir die Dämpfung des Kreisels messen und daraus Dämpfungskonstante und Halbwertszeit bestimmen. Als letztes wollen wir sowohl aus Präzession als auch aus Nutation das Trägheitsmoment des Kreisels herleiten.

1.2 Versuchsaufbau

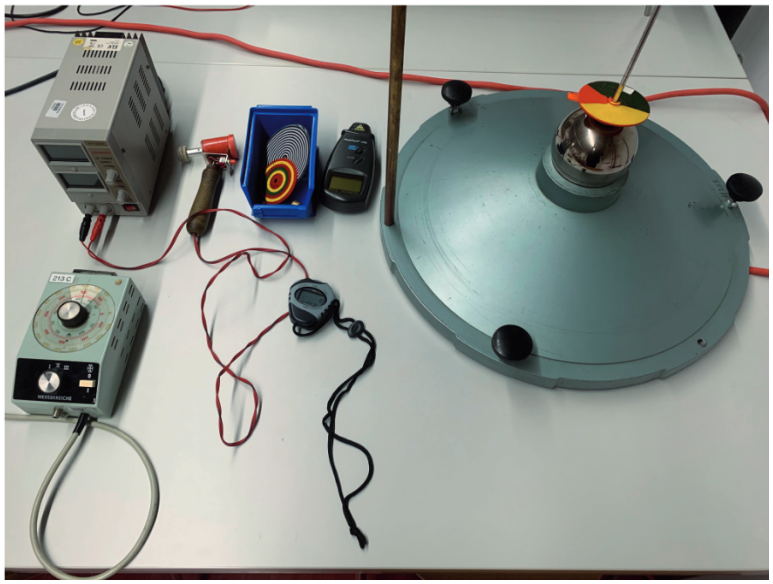


Abbildung 1: Versuchsaufbau

In diesem Versuch dreht sich alles um den in Abbildung 1 oben rechts gezeigten Kreisel. Dieser ist auf einer Luftkissenpfanne gelagert, die die Dämpfung des Kreisels reduzieren soll. Mit einem Motor können wir diesen Kreisel nun auf hohe Frequenzen beschleunigen. Mit einem Stroboskop oder einem Tachometer können wir diese Frequenz dann ausmessen. Beigelegt sind außerdem zwei Gewichte und eine Farbscheibe, mit denen wir daen Schwerpunkt des Kreisels verändern können, wenn wir sie auf den Stab stecken.

1.3 Physikalische Grundlagen

1.3.1 Kräftefreier, symmetrischer Kreisel

Ein Kreisel wird Symmetrisch genannt, wenn zwei seiner Hauptträgheitsmomente gleich groß sind. Ein kräftefreier Kreisel wird dadurch charakterisiert, dass er im Schwerpunkt aufgehängt ist. Das bedeutet, dass das Drehmoment der $\vec{M}$ der Schwerkraft verschwindet. Lässt man ihn also frei drehen, so ist Betrag und Richtung des Drehimpulses $\vec{L}$ konstant.
Bei einem Kreisel, welcher beide dieser Eigenschaften erfüllt, werden zur Beschreibung seiner Bewegung einige Größen nützlich:

- Die Figurenachse (Symmetrieachse des Kreisels) $\vec{F}$
- Die raumfeste Drehimpulsachse $\vec{L}$
- Die Richtung der Drehachse $\vec{\omega}$

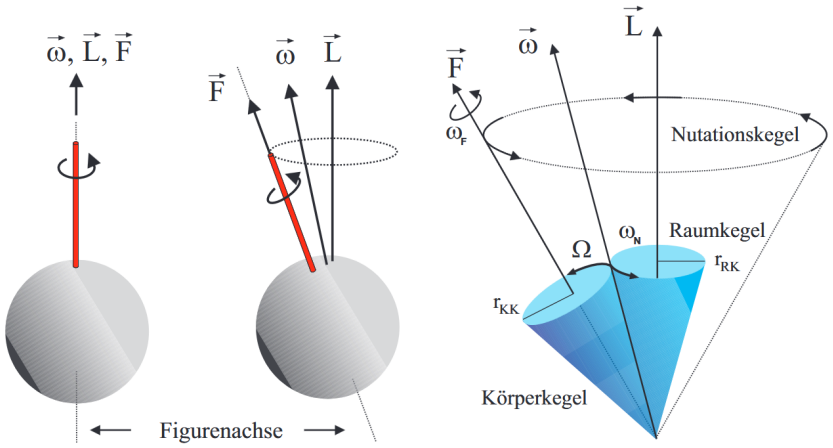


Abbildung 2: Bewegung des kräftefreien, symmetrischen Kreisels

Wird der Kreisel nun so angedreht, dass die Richtung der Figurenachse konstant bleibt, so fallen wie in Abbildung 2 links gezeigt alle diese drei Vektoren aufeinander. Erteilt man dem Kegel nun einen leichten Stoß, so verschieben sich die Achsen zueinander. Das ist in in Abbildung 2 mittig gezeigt. Aufgrund der Drehimpulserhaltung bleibt $\vec{L}$ weiterhin konstant. Die Figurenachse hingegen rotiert um diese Drehimpulsachse herum, der Kreisel führ eine *Nutationsbewegung* durch. Diese Bewegung kann man sich wie in Abbildung 2 rechts vorstellen: Die Figurenachse rotiert auf einem gedachten Kegelmantel mit der Frequenz $\vec{\omega}_N$ um die Drehimpulsachse, rotiert aber selbst mit $\vec{\omega}_F$. Die Frequenz $\vec{\omega}$ ergibt sich aus diesen beiden durch:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_N + \vec{\omega}_F \tag{1}$$

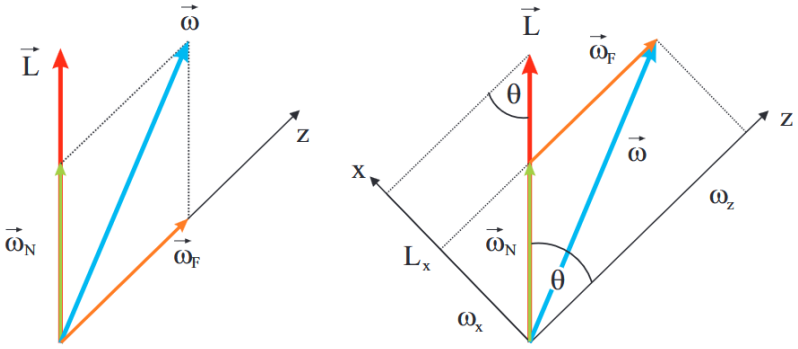


Abbildung 3: Geometrische Darstellung der Nutationsbewegung

Zerlegen wir nun $\vec{\omega}$ in seine Komponenten, so folgt mit:

$$\omega_x = \omega_N \sin\theta \tag{2}$$
$$L_x = L \sin\theta = I_x \omega_x \tag{3}$$

für die Nutationsfrequenz:

$$\omega_N = \frac{L}{I_x} \tag{4}$$

Wenn man den Kreisel nur wenig auslenkt, so kann man nähern:

$$L \approx I_z \omega \approx I_z \omega_F \tag{5}$$

Dann ist die Nutationsfrequenz:

$$\omega_N \approx \frac{I_z}{I_x} \omega_F \tag{6}$$

Um die momentane Drehachse zu bestimmen, nutzen wir die farbsegmentierte Scheibe. Dessen Farben verschwimmen aufgrund der Rotation bis auf in einem Punkt. In diesem sieht man langsam alle Farben klar durchlaufen. Dort ist dann die Drehachse. Die Frequenz Ω des Farbwechsels ist gegeben durch:

$$\frac{\Omega}{\omega_N} = \frac{r_{RK}}{r_{KK}} \tag{7}$$

Dabei ist r_{RK} der Radius des Raumkegels und r_{KK} der Radius des Körperkegels. Nach einigen Berechnungen folgt daraus:

$$\Omega = \frac{I_x - I_z}{I_x} \omega_F \tag{8}$$

1.3.2 Schwerer, symmetrischer Kreisel

Bei einem schweren Kreisel liegt die Aufhängung jetzt nicht mehr im Schwerpunkt, bei einem symmetrischen jedoch immer noch auf der Figurenachse. Wir wollen nur den Fall betrachten, bei dem keine Nutationsbewegung auftritt, also $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ zusammenfallen.

Aufgrund der Schwerkraft wirkt nun ein äußeres Drehmoment $\vec{M}$ auf den Kreisel. Für dieses gilt:

$$\vec{M} = \vec{l} \times m\vec{g} \tag{9}$$

Hierbei ist $\vec{l}$ der Vektor, der von dem Unterstützungspunkt zu einer Zusatzmasse m zeigt, die an einen vorher kräftefreien Kreisel angehängt wurde.

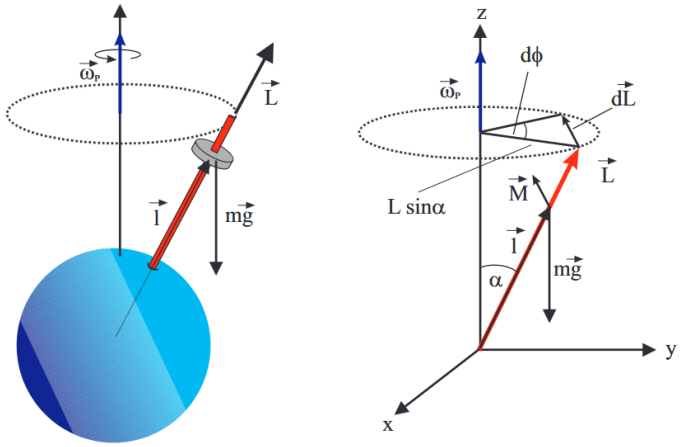


Abbildung 4: schwerer, symmetrischer Kreisel

Da somit $\vec{M} \perp \vec{L}$ gilt, ändert sich der Betrag des Drehimpulses weiterhin nicht, seine Richtung allerdings schon. Der Drehimpulsvektor rotiert wie in Abbildung 4 dargestellt auf einem Kegelmantel in z-Richtung. Diese Bewegung nennt man Präzession. Die Präzessionsfrequenz ω_P kann man aus der zeitlichen Änderung des Präzessionswinkels φ bestimmen:

$$\omega_P = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L}{L \sin\alpha \, \mathrm{d}t} \tag{10}$$

Aus $L = I_z \omega_F$ folgt:

$$\omega_P = \frac{mgl}{I_z \omega_F} \tag{11}$$

Wenn der Kreisel doch eine Nutationsbewegung durchführt, so wird die Beschreibung der Bewegung deutlich komplexer. Die Figurenachse durchläuft eine Art Girlandenform. Diese Bewegung beobachten wir jedoch rein qualitativ.

2 Messprotokoll

Anmerkung: Wir haben immer f gemessen, auch wenn ω da steht.

Marie Welle
Sofia El Kanli
Jonas Schweer

Versuch 213

Kreisel

07.03.2025
$9^{00} - 12^{00}$ Uhr

Aufgabe 1 VORVERSUCH

a) Metallring Kugellager eindrücken: Stab weicht Finger aus und es ist eine Nutationsbewegung zu beobachten.

b) Nutation durch leichten Stoß: Wir erkennen eine unvermischte Farbe in der Mitte des Nutationskegels, diese ändert sich periodisch. Bei der Scheibe mit den konzentrischen Kreisen verändert sich die Farbe an der momentanen Drehachse nicht.

c) Ohne Nutation ist ein System konzentrischer verwaschener Kreise erkennbar, was mit umgekehrter Farbscheibe wieder beobachtet werden kann. Mit Gewicht selbe Ergebnisse.

d) ohne Gewicht (Schwerpunkt unten): Präzession entgegen der Drehrichtung.
Mit Gewicht (Schwerpunkt oben): Präzession mit der Drehrichtung

Aufgabe 2: Messen der Dämpfung des Kreisels

Tabelle 1: Abnahme der Frequenz

Zeit t [min]	0	2	4	6	8	10	12
Frequenz f $[\frac{1}{min}]$	689,0	633,7	585,0	539,5	492,0	455,8	424,8

Mit den Fehlern: $\Delta f = 2{,}0 \ \frac{1}{min}$ $\Delta t = 5s$

Aufgabe 3: Präzession

a) Tabelle 2: Präzessionsdauer T_p des schweren Kreisels in Abhängigkeit des Winkels zur Vertikalen

Winkel [°]	30	60	90
T_p [s]	66,37	65,45	61,43

$f = 495 \pm 15 \ \frac{1}{min}$ $\Delta T_p = 3s$ $\Delta Winkel = 10°$

b) Tabelle 3: Messung der Präzessionsdauern T_p in Abhängigkeit der Frequenz W_F für versch. Gewichte

Fehler: $\Delta t = 3s$
$\Delta W_F = 10 \ \frac{1}{min}$

NR	GEWICHT & LAGE	FREQUENZ W_F [1/min]	T_p
1	1 bei 15 cm	635,1	107,86
		490,7	84,34
		390,3	67,40
		304,4	52,84
2	2 bei 15 cm	673,4	59,09
		498,3	45,50
		429,7	39,48
		280,2	85,37
3	1 bei 20 cm	646,8	84,86
		526,4	70,73
		400,3	54,01
		296,7	39,42
4	2 bei 20cm	630,3	44,29
		535,7	37,46
		409,4	28,75
		301,1	21,06

Aufgabe 4: Umlauf der momentanen Drehachse um die Figurenachse

a) Reihenfolge der Farben: grün - rot - gelb, Verschiebung der momentanen Drehachse mit Drehrichtung

b) Tabelle 4: Zeit für 10 Umläufe bei versch. Frequenzen

f [min^{-1}]	604	563,7	524,8	491,5	444,7	414,7	387,6	361,7	341,6	324,2
t [s]	14,68	15,70	16,76	18,15	20,04	21,48	22,40	24,36	25,78	26,89

Fehler: $\Delta f = 10$ min^{-1} $\Delta t = 0{,}5$s

c) Tabelle 5: Messung der Nutationsfrequenz ω_N bezüglich der Eigenfrequenz der Figurenachse ω_F

ω_F [min^{-1}]	760	720	660	560	530	500	460	425	390	320
ω_N [min^{-1}]	710	670	620	510	490	465	430	390	350	280

Fehler: $\Delta\omega = 10$ min^{-1}

Fehler Tachometer: 0,05 % + 1 digit (0,1 min^{-1})

Stroboskop: ± 3 %.

07.03.

3 Auswertung

3.1 Aufgabe 1 - Vorversuch

Bevor wir die Beobachtungen durchgeführt haben, haben wir zuerst die Farbscheibe so an dem Kreisel befestigt, dass er bei einer Verschiebung in eine 90°-Lage keine Präzessionsbewegung durchführt. Der Kreisel ist nun also kräftefrei. Wenn wir nun den Kreisel an dem Kugellager verschieben, sehen wir, dass die Rotation stabil bleibt, der Drehimpuls folgt also der Figurenachse. Wenn wir dem Kreisel stattdessen einen Stoß verpassen, verschieben sich Figurenachse und Drehimpulsachse unterschiedlich und es kommt zur Nutation. Bei der Nutation konnten wir auf der Scheibe einen Punkt erkennen, bei dem die Farbe nicht unvermischt ist. Wenn wir die Scheibe mit konzentrischen Kreisen auflegen, verändert sich die Farbe an diesem Punkt nicht. Wenn wir die Scheibe mit konzentrischen schwarz-weiß Kreisen auf die Farbscheibe legen, ist ein System konzentrischer verwaschener Kreise zu erkennen. Regen wir nun den Kreisel zur Nutation an, verändert sich die Schärfe der Kreise periodisch. Das liegt daran, dass sich die Zentren der Kreise durch die Bewegung der Rotationsachse periodisch Näher und weniger nah an ihr befinden ($\rightarrow$ periodischer Wechsel zwischen scharf und unscharf) Bei der Scheibe, bei der das Zentrum der Kreise auf der Figurenachse liegt, beobachtet man fast das Umgekehrte: ohne Nutation sind die Kreise scharf, mit Nutation ist wieder nur ein Punkt scharf.
Entfernen wir nun die Farbscheibe, sodass der Kreisel zu einem schweren Kreisel wird, findet eine Präzessionsbewegung statt. Ist der Schwerpunkt unterhalb der Kugelmitte, so findet die Präzession gegen die Drehrichtung statt, ist er oberhalb, dann Bewegt er sich mit der Drehrichtung.

3.2 Aufgabe 2 - Dämpfung des Kreisels

Zuerst wollen wir die Dämpfung des Kreisels in der Luftkissenpfanne bestimmen. Dafür nutzen wir die Messdaten aus Aufgabe 2 und fitten eine Funktion der Form
$f(x) = a \exp[bx]$ hindurch.
Der Wert von b entspricht dann der negativen Dämpfungskonstante: $b = -\delta$
(Da Python Probleme beim fitten hatte, haben wir stattdessen die Frequenzdaten logarithmiert (Fehler: $\Delta(\log f) = \Delta f/f$) und dann eine Funktion der Form $bx + a$ hindurch gefittet. Der Wert für b und sein Fehler ist aber in beiden Fällen der gleiche, nur a ändert sich, dieser interessiert uns allerdings sowieso nicht.)
Die gefittete Funktion sieht dann so aus:

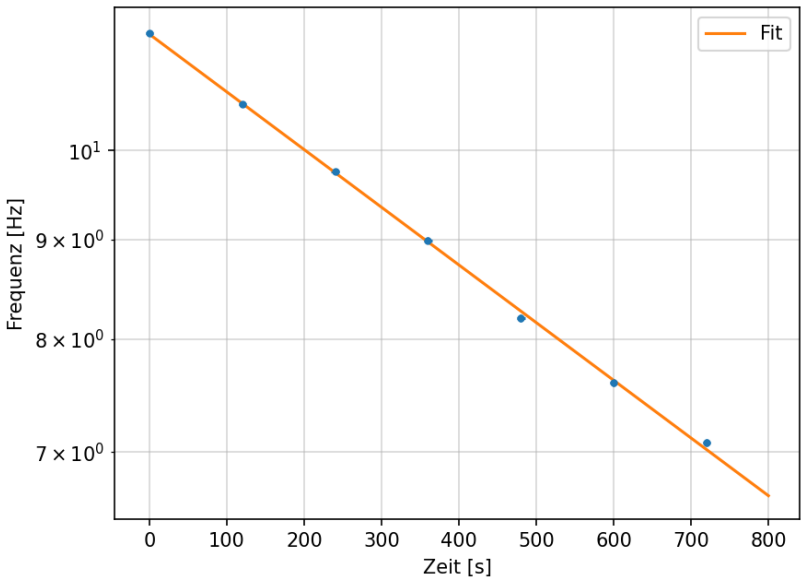


Abbildung 5: Plot der Dämpfungsmessung mit Fit

Die Dämpfungskonstante wird uns ausgegeben als:

$$\boxed{\delta = (68.2 \pm 0.6) \cdot 10^{-5} \mathrm{s}^{-1}}$$

Daraus können wir nun auch die Halbwertszeit bestimmen mit:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\delta} \tag{12}$$

$$\Delta T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\delta^2} \Delta\delta \tag{13}$$

Diese lautet dann:

$$\boxed{T_{1/2} = (1016 \pm 9)\mathrm{s}}$$

3.3 Aufgabe 3 - Präzessionszeiten in Abhängigkeit des Winkel

Schauen wir uns die Präzessionszeiten in Tabelle 2 des Messprotokolls an, so sehen wir, dass diese alle sehr nah beieinander liegen. Zwar sind die Zeiten der größeren Winkel etwas kürzer, jedoch liegen sie alle noch im 1σ-Bereich voneinander. Die längere Dauer der kleineren Winkel ist vermutlich einfach darauf zurückzuführen, dass wir dort länger zum Ausrichten gebraucht haben, und so die Frequenz schon weiter abgesunken ist. Der Winkel hat also keine signifikante Auswirkung auf die weiteren Rechnungen.

3.4 Aufgabe 4 - Trägheitsmoment entlang der z-Achse

Aus Formel 11 finden wir durch umstellen:

$$I_Z = \frac{mgl}{\omega_P \omega_F} = \frac{mglT_P}{2\pi\omega_F} \tag{14}$$

m und l werden für den Versuch jeweils eingestellt. Die Anfangsfrequenz der Figurenachse $f_{F,i} = \frac{\omega_{F,i}}{2\pi}$ haben wir während der Messung bestimmt. Da der Kreisel allerdings gedämpft ist, berechnen wir zudem noch aus der in Aufgabe 2 bestimmten Dämpfungskonstante die Endfrequenz $\omega_{F,f}$. Anschließend berechnen wir den Mittelwert der beiden Werte und nutzen diesen:

$$\omega_{F,i} = 2\pi f_{F,i}\,,\ \Delta\omega_{F,i} = 2\pi\Delta f_{F,i} \tag{15}$$

$$\omega_{F,f} = \omega_{F,i}\exp[-\delta T_P]\,,\ \Delta\omega_{F,f} = \exp[-\delta T_P]\sqrt{(\Delta\omega_{F,i})^2 + (\omega_{F,i}\delta\Delta T_P)^2 + (\omega_{F,i}T_P\Delta\delta)^2} \tag{16}$$

$$\bar{\omega}_F = \frac{\omega_{F,i} + \omega_{F,f}}{2}\,,\ \Delta\bar{\omega}_F = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta\omega_{F,i}^2 + \Delta\omega_{F,f}^2} \tag{17}$$

Die Präzessionsfrequenz, die man in Formel (14) noch benötigt, erhält man durch:

$$\omega_P = \frac{2\pi}{T_P}\,,\ \Delta\omega_P = \frac{2\pi}{T_P^2}\Delta T_P \tag{18}$$

Die $\bar{\omega}_F$ und ω_P, die wir so erhalten, sind für die verschiedenen Anordnungen von m und l in folgenden Tabellen Aufgetragen:

T_P [s]	108 ± 3	84 ± 3	67 ± 3	53 ± 3
$\bar{\omega}_F$ [Hz]	64.1 ± 0.7	50.0 ± 0.7	40.0 ± 0.7	31.3 ± 0.7
ω_P [Hz]	0.0583 ± 0.0016	0.0745 ± 0.0026	0.093 ± 0.004	0.119 ± 0.007

Tabelle 1: $m = 9.85$g, $l = 15$cm

T_P [s]	59 ± 3	46 ± 3	39 ± 3	25 ± 3
$\bar{\omega}_F$ [Hz]	69.1 ± 0.7	51.4 ± 0.7	44.4 ± 0.7	29.1 ± 0.7
ω_P [Hz]	0.106 ± 0.005	0.138 ± 0.009	0.159 ± 0.012	0.248 ± 0.029

Tabelle 2: $m = 19.7$g, $l = 15$cm

T_P [s]	85 ± 3	71 ± 3	54 ± 3	39 ± 3
$\bar{\omega}_F$ [Hz]	65.7 ± 0.7	53.8 ± 0.7	41.2 ± 0.7	30.7 ± 0.7
ω_P [Hz]	0.0740 ± 0.0026	0.089 ± 0.004	0.116 ± 0.006	0.159 ± 0.012

Tabelle 3: $m = 9.85$g, $l = 20$cm

T_P [s]	44 ± 3	37 ± 3	29 ± 3	21 ± 3
$\bar{\omega}_F$ [Hz]	65.0 ± 0.7	55.4 ± 0.7	42.5 ± 0.7	31.3 ± 0.7
ω_P [Hz]	0.142 ± 0.010	0.168 ± 0.013	0.219 ± 0.023	0.30 ± 0.04

Tabelle 4: $m = 19.7$g, $l = 20$cm

Plotten wir nun T_P in Abhängigkeit von $\bar{\omega}_F$ und fitten eine Gerade hindurch, so gibt uns die Steigung s dieser Gerade den Bruch:

$$s = \frac{T_P}{\bar{\omega}_F} \tag{19}$$

welchen wir in Formel (14) einsetzen können. Der Plot sieht so aus:

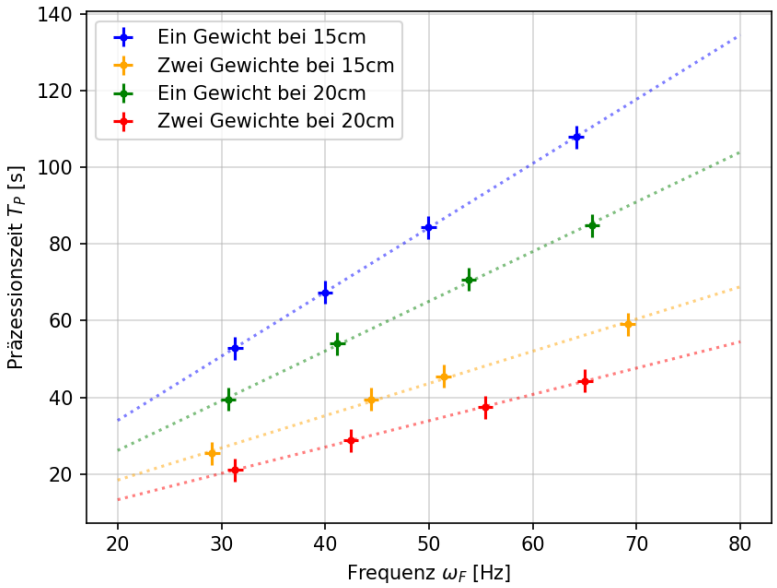


Abbildung 6: Abhängigkeit der Frequenz der Figurenachse zur Präzessionszeit

Die Steigungen sind somit:

$$\boxed{s_1 = (1.676 \pm 0.006)s^2}$$
$$\boxed{s_2 = (0.84 \pm 0.03)s^2}$$
$$\boxed{s_3 = (1.30 \pm 0.03)s^2}$$
$$\boxed{s_4 = (0.687 \pm 0.004)s^2}$$

Dabei beschreiben die Indizes, auf welche Tabelle sich die Daten bezogen haben, aus der die Steigung folgt. Setzen wir nun diese Steigungen in Formel (14) ein, wobei der Fehler gegeben ist als:

$$\Delta I_z = \frac{mg}{2\pi}\sqrt{(l\Delta s)^2 + (s\Delta l)^2} \tag{20}$$

(Den Fehler der Länge schätzen wir auf 3mm), so sind die Trägheitsmomente entlang der z-Achse:

$$\boxed{I_{z,1} = (387 \pm 8) \cdot 10^{-5}\mathrm{kg\,m^2}}$$
$$\boxed{I_{z,2} = (388 \pm 17) \cdot 10^{-5}\mathrm{kg\,m^2}}$$

$$\boxed{I_{z,3} = (399 \pm 11) \cdot 10^{-5} \mathrm{kg\,m^2}}$$
$$\boxed{I_{z,4} = (422 \pm 7) \cdot 10^{-5} \mathrm{kg\,m^2}}$$

Da wir das extra Drehmoment der Gewichte vernachlässigen, ist unser finales Trägheitsmoment in z-Richtung aus Mittlung aller Werte:

$$\boxed{\bar{I}_z = (399 \pm 11) \cdot 10^{-5} \mathrm{kg\,m^2}}$$

3.5 Aufgabe 5 - Beobachtungen bei Nutation

Wir haben in Aufgabe 4 im Messprotokoll bestimmt, dass sich die momentane Drehachse mit der Drehrichtung der Figurenachse bewegt. Man kann also folgern, dass sowohl ω_F als auch Ω die selbe Richtung haben, und somit $\frac{\Omega}{\omega_F}$ positiv ist. Wenn wir nun Formel (8) anschauen, so muss also auch $\frac{I_x - I_z}{I_x}$ positiv sein. $\Rightarrow I_x > I_z$

3.6 Aufgabe 6 - Berechnung von I_x

Zuerst wollen wir aus unseren Messungen die Frequenz des Farbwechsels bestimmen. Da wir die Dauer für 10 Farbdurchläufe gemessen haben, folgt für die Farbwechselfrequenz:

$$\Omega = \frac{20\pi}{t} \tag{21}$$
$$\Delta\Omega = \frac{20\pi}{t^2}\Delta t \tag{22}$$

Plotten wir diese Ω gegen die Frequenz der Figurenachse mit $\omega_F = 2\pi f$, $\Delta\omega_F = 2\pi\Delta f$, so können wir dann die Steigung $s = \frac{\Omega}{\omega_F}$ nutzen, um sie nach Formel (8) dem Quotienten $\frac{I_x - I_z}{I_x}$ gleichzusetzen.

$$s = \frac{I_x - I_z}{I_x} \tag{23}$$

Umgestellt nach I_x erhalten wir:

$$I_x = \frac{I_z}{1 - s} \tag{24}$$

Mit dem Fehler:

$$\Delta I_x = \sqrt{\left(\frac{\Delta I_z}{1-s}\right)^2 + \left(\frac{I_z}{(1-s)^2}\Delta s\right)^2} \tag{25}$$

Geplottet sehen die Daten so aus:

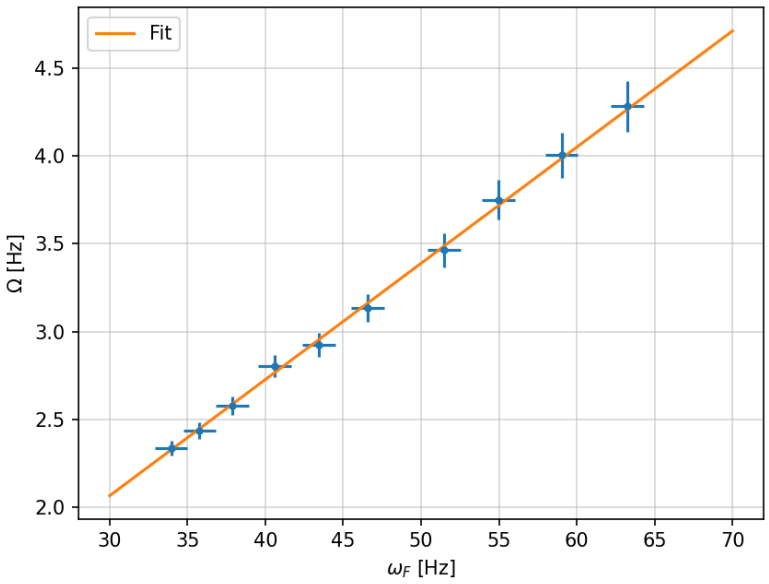


Abbildung 7: Farbdurchlauffrequenz in Abhängigkeit der Drehfrequenz

Die Steigung lautet:

$$\boxed{s = 0.0661 \pm 0.0029}$$

Und damit das Trägheitsmoment in x-Richtung:

$$\boxed{I_x = (427 \pm 12) \cdot 10^{-5} \mathrm{kg\,m^2}}$$

3.7 Aufgabe 7 - Erneute Bestimmung von I_x

Nun wollen wir I_x nach Formel (6) bestimmen. Dafür plotten wir unsere Messdaten aus Tabelle 5 des Messprotokoll (wobei wieder die bekannte Gleichung $\omega = 2\pi f$ und $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ gilt). Die Steigung s wir diesmal dem Bruch $\frac{\omega_N}{\omega_F}$ entsprechen. Wir rechnen somit:

$$I_x = \frac{I_z}{s} \tag{26}$$

mit dem Fehler:

$$\Delta I_x = \sqrt{\left(\frac{\Delta I_z}{s}\right)^2 + \left(\frac{I_z}{s^2}\Delta s\right)^2} \tag{27}$$

Der Plot sieht dann so aus:

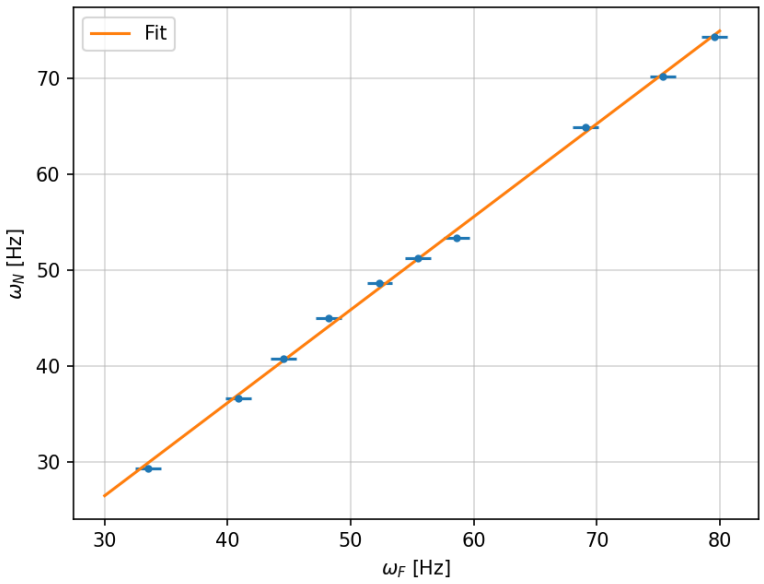


Abbildung 8: Nutationsfrequenz pro Frequenz der Figurenachse

mit der Steigung:

$$\boxed{s = 0.969 \pm 0.013}$$

Unser Trägheitsmoment ist:

$$\boxed{I_x = (412 \pm 13) \cdot 10^{-5} \mathrm{kg\,m^2}}$$

4 Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Versuch haben wir uns das Verhaltendes symmetrischen kräftefreien Kreisels, sowie des symmetrischen schweren Kreisels angeschaut. Dafür haben wir zuerst einen qualitativen Vorversuch gemacht, um die Bewegung des Kreisels bei verschiedenen Bedingungen zu beobachten. Anschließend haben wir die Dämpfung des Kreisels in der Luftkissenpfanne bestimmt. Mit diesem Wert konnten wir dann letztendlich das Trägheitsmoment entlang der z-Achse und zwei mal entlang der x-Achse präziser bestimmen.
Um die Dämpfung zu bestimmen, haben wir den Kreisel 12 Minuten lang ungestört drehen lassen und dabei alle 2 Minuten die Frehfrequenz notiert. Die Dämpfungskonstante die wir so bestimmen konnten, lautet:

$\boxed{\delta = (68.2 \pm 0.6) \cdot 10^{-5} \mathrm{s^{-1}}}$ Aus dieser Dämpfung konnten wir auch die Halbwertszeit berechnen als:

$$\boxed{T_{1/2} = (1016 \pm 9)\text{s} \approx 17\text{min}}$$

Wir sehen also, dass die Luftkissenpfanne tatsächlich die Dämpfung sehr klein gemacht hat, so wie man es erwarte würde. Die Frequenz nimmt also nur sehr langsam ab.
Anschließend haben wir eine Messung der Präzessionsdauer durchgeführt, um daraus das Trägheitsmoment entlang der z-Achse zu bestimmen. Dafür haben wir uns zuvor davon überzeugt, dass der Winkel des Kreisels nahezu keinen Unterschied in der Dauer macht. Aus den Messungen der Dauer bei den dazugehörigen Frequenzen um die Figurenachse konnten wir das Trägheitsmoment der z-Achse bestimmen. Um bessere Ergebnisse zu erhalten, haben wir auch die zuvor bestimme Dämpfung mitberücksichtigt. Gemittelt über mehrere Messungen erhielten wir:

$$\boxed{I_z = (399 \pm 11) \cdot 10^{-5}\text{kg m}^2}$$

Damit haben wir zuletzt einmal über die Frequenz des Farbwechsels einer Farbscheibe und einmal über die Nutationsfrequenz im Vergleich mit der Drehfrequenz um die Figurenachse das Trägheitsmoment in x-Richtung bestimmt. Aus der Farbwechselfrequenz ergab sich:

$$\boxed{I_x = (427 \pm 12) \cdot 10^{-5}\text{kg m}^2}$$

und aus dem Verhältnis $\frac{\omega_N}{\omega_F}$:

$$\boxed{I_x = (412 \pm 13) \cdot 10^{-5}\text{kg m}^2}$$

Beide Ergebnisse für I_x sind wie erwartet größer als I_z. Vergleichen wir die beiden Werte miteinander mittels folgender Formel:

$$\sigma = \frac{|x - y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \tag{28}$$

so erhalten wir eine Abweichung von:

$$\boxed{\sigma = 0.85}$$

Die Abweichung ist also nicht signifikant. Man kann davon ausgehen, dass keine großen systematischen Fehler aufgetreten sind. Bei einer erneuten Durchführung würde ich vor allem die Winkelabhängigkeit der Präzessionsdauer genauer untersuchen. Von unseren drei Messungen bei verschiedenen Winkeln kann man zwar davon ausgehen, dass hier keine Veränderung des Wertes stattfindet, jedoch reichen drei Messungen meiner Meinung nach noch nicht für eine konkrete Aussage. Zudem könnte man überlegen, ob es Sinnvoll wäre, die zusätzlichen Gewichte doch auch in dem Trägheitsmoment mit zu berücksichtigen. Unsere vier Werte in Aufgabe 4 haben doch schon etwas Streuung aufgezeigt (v.A. $I_{z,4}$), sodass entweder doch ein Fehler passiert ist, oder das Drehmoment der Gewichte die Messung verfälscht hat. Ansonsten bin ich jedoch zufrieden mit den Ergebnissen des Versuches, da die Ergebnisse zum einen wie erwartet Berechnet wurden und zum anderen die beiden Trägheitsmomente in x-Richtung keine große Abweichung

zeigen.

5 Anhang

Versuch 213

March 28, 2025

[1]:
```
#imports
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.constants as c
from scipy.optimize import curve_fit
```

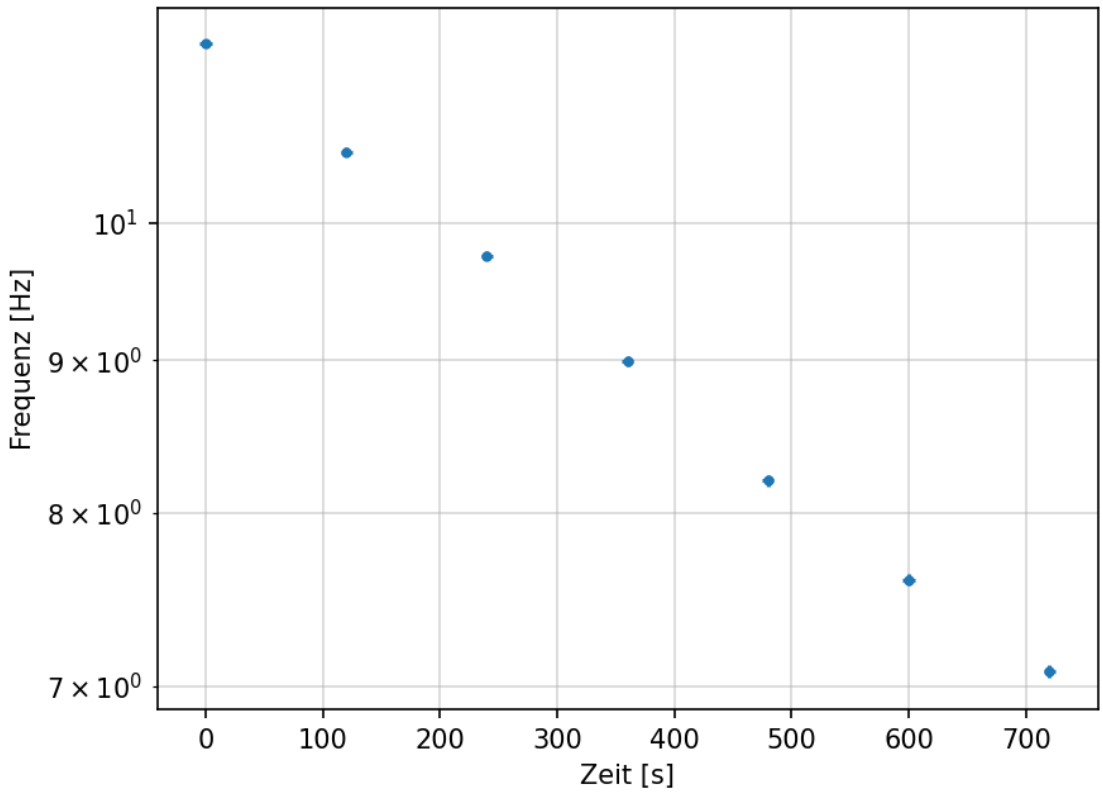
[2]:
```
#Dateipfade
INPUT_DIRECTORY = "../Input_Data/Versuch 213/"
OUTPUT_DIRECTORY = "../Plots/Versuch 213/"
```

[3]:
```
#coole Funktionen
def lin(x,a,b):
    return a*x + b
def exp(x,a,b):
    return b*np.exp(a*x)
```

Aufgabe 2

[4]:
```
#Messdaten
t, Delta_t = (np.array([0,2,4,6,8,10,12]) * 60,
              5) #s
f, Delta_f = (np.array([689.0,633.7,585.0,539.5,492.0,455.8,424.8]) / 60,
              2 / 60) #Hz
```

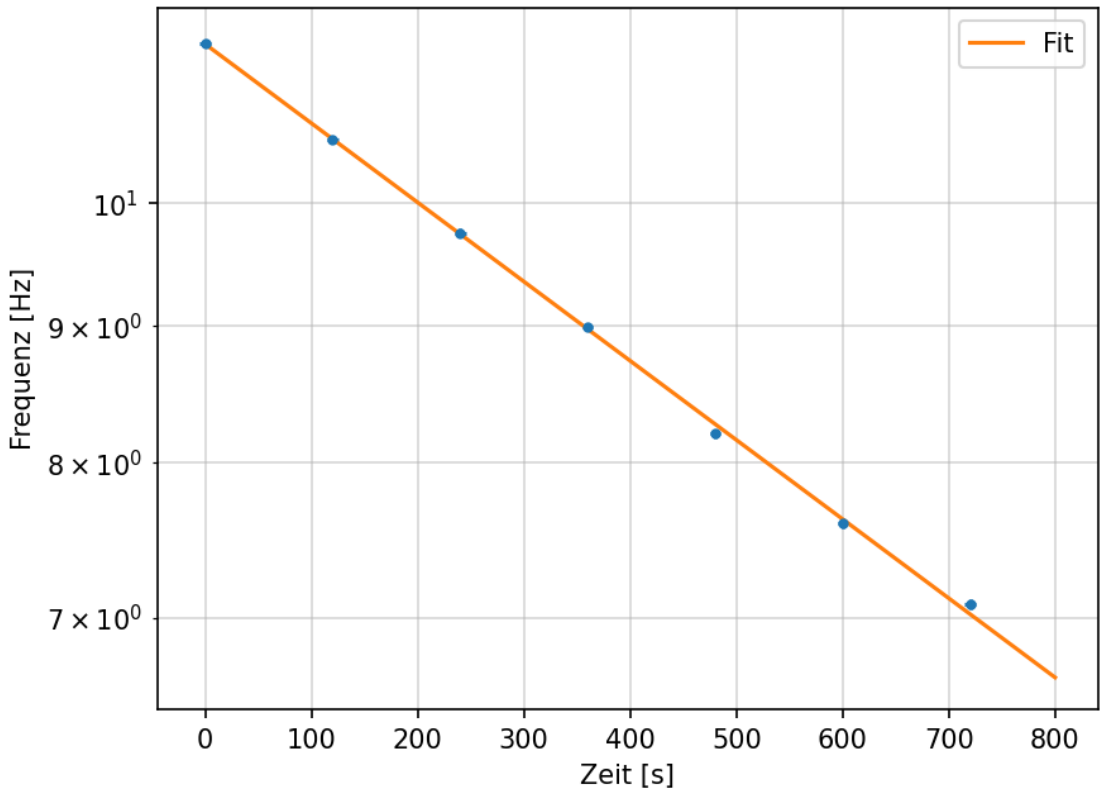
[5]:
```
plt.figure(dpi = 150)
plt.errorbar(t,f,xerr = Delta_t, yerr = Delta_f, fmt = ".")
plt.xlabel("Zeit [s]")
plt.ylabel("Frequenz [Hz]")
plt.yscale("log")
plt.grid(alpha = 0.5, which="both")
plt.savefig(OUTPUT_DIRECTORY + "Plot1.png")
```



[6]:
```
#an lineare Funktion anfitten weil das einfacher ist
log_f = np.log(f)
Delta_log_f = Delta_f/f
popt1, pcov1 = curve_fit(lin, t, log_f, sigma = Delta_log_f,␣
 ↪absolute_sigma=True)
#erster Parameter ist direkt unsere Dämpfungskonstante
damp, Delta_damp = -popt1[0], np.sqrt(pcov1[0][0])
damp, Delta_damp
```

[6]:
```
(np.float64(0.0006818819813060158), np.float64(5.877769606259281e-06))
```

[7]:
```
x = np.linspace(0,800,100)
plt.figure(dpi = 150)
plt.errorbar(t,f,xerr = Delta_t, yerr = Delta_f, fmt = ".")
plt.plot(x, exp(x ,popt1[0], np.exp(popt1[1])), label = "Fit")
plt.xlabel("Zeit [s]")
plt.ylabel("Frequenz [Hz]")
plt.yscale("log")
plt.legend()
plt.grid(alpha = 0.5,which="both")
plt.savefig(OUTPUT_DIRECTORY + "Plot2.png")
```



[8]:
```
#Halbwertszeit bestimmen
T12, Delta_T12 = (np.log(2)/damp,
                  np.log(2)/damp**2 * Delta_damp)
T12, Delta_T12
```

[8]:
```
(np.float64(1016.5207463502014), np.float64(8.762329715159026))
```

Aufgabe 3

[9]:
```
#Messdaten a)
phi, Delta_phi = (np.radians(np.array([30,60,90])),
                          np.radians(10)) #rad
T_p, Delta_T_p = (np.array([66.37, 65.45, 61.43]),
                  3) #s
f, Delta_f = (495/60,
              15/60) #Hz
#Werden kinda nicht gebraucht
```

[10]:
```
#Messdaten b)
Delta_omega = 2 * np.pi * 10/60
Delta_T_P = 3
```

```
T_P1 = np.array([107.86, 84.34, 67.40, 52.84]) #s
omegaI1 = 2 * np.pi * np.array([635.1, 490.7, 390.3, 304.4]) / 60 #Hz
omegaF1 = exp(T_P1,-damp,omegaI1)
Delta_omegaF1 = exp(T_P1,-damp,1) * np.sqrt((Delta_omega)**2 + (omegaI1 * damp␣
 ↪* Delta_T_P)**2 + (omegaI1 * Delta_damp * T_P1)**2)
omegaP1 = 2 * np.pi / T_P1
Delta_omegaP1 = 2 * np.pi / T_P1**2 * Delta_T_P
baromega1 = (omegaI1 + omegaF1) / 2
Delta_baromega1 = 1/2 * np.sqrt(Delta_omegaF1**2 + Delta_omega**2)

T_P2 = np.array([59.09, 45.50, 39.48, 25.37])
omegaI2 = 2 * np.pi * np.array([673.4,498.3,429.7,280.2]) / 60
omegaF2 = exp(T_P2,-damp,omegaI2)
Delta_omegaF2 = exp(T_P2,-damp,1) * np.sqrt((Delta_omega)**2 + (omegaI2 * damp␣
 ↪* Delta_T_P)**2 + (omegaI2 * Delta_damp * T_P2)**2)
omegaP2 = 2 * np.pi / T_P2
Delta_omegaP2 = 2 * np.pi / T_P2**2 * Delta_T_P
baromega2 = (omegaI2 + omegaF2) / 2
Delta_baromega2 = 1/2 * np.sqrt(Delta_omegaF2**2 + Delta_omega**2)

T_P3 = np.array([84.86, 70.73, 54.01, 39.42])
omegaI3 = 2 * np.pi * np.array([645.8, 526.4, 400.3, 296.7]) / 60
omegaF3 = exp(T_P3,-damp,omegaI3)
Delta_omegaF3 = exp(T_P3,-damp,1) * np.sqrt((Delta_omega)**2 + (omegaI3 * damp␣
 ↪* Delta_T_P)**2 + (omegaI3 * Delta_damp * T_P3)**2)
omegaP3 = 2 * np.pi / T_P3
Delta_omegaP3 = 2 * np.pi / T_P3**2 * Delta_T_P
baromega3 = (omegaI3 + omegaF3) / 2
Delta_baromega3 = 1/2 * np.sqrt(Delta_omegaF3**2 + Delta_omega**2)

T_P4 = np.array([44.29, 37.46, 28.75, 21.06])
omegaI4 = 2 * np.pi * np.array([630.3,535.7,409.4,301.1]) / 60
omegaF4 = exp(T_P4,-damp,omegaI4)
Delta_omegaF4 = exp(T_P4,-damp,1) * np.sqrt((Delta_omega)**2 + (omegaI4 * damp␣
 ↪* Delta_T_P)**2 + (omegaI4 * Delta_damp * T_P4)**2)
omegaP4 = 2 * np.pi / T_P4
Delta_omegaP4 = 2 * np.pi / T_P4**2 * Delta_T_P
baromega4 = (omegaI4 + omegaF4) / 2
Delta_baromega4 = 1/2 * np.sqrt(Delta_omegaF4**2 + Delta_omega**2)

print(baromega4, Delta_baromega4)
print(omegaP4, Delta_omegaP4)
```

```
[65.02306994 55.39097713 42.45612388 31.30633584] [0.73253146 0.73336348
0.73459633 0.73591014]
[0.14186465 0.16773052 0.21854558 0.29834688] [0.00960926 0.01343277 0.02280476
0.04249956]
```

[11]:
```
#fitten von geraden
popt1, pcov1 = curve_fit(lin, baromega1, T_P1, sigma = np.full_like(T_P1,␣
 ↪Delta_T_P))
popt2, pcov2 = curve_fit(lin, baromega2, T_P2, sigma = np.full_like(T_P2,␣
 ↪Delta_T_P))
popt3, pcov3 = curve_fit(lin, baromega3, T_P3, sigma = np.full_like(T_P3,␣
 ↪Delta_T_P))
popt4, pcov4 = curve_fit(lin, baromega4, T_P4, sigma = np.full_like(T_P4,␣
 ↪Delta_T_P))
print(popt1[0],np.sqrt(pcov1[0][0]))
print(popt2[0],np.sqrt(pcov2[0][0]))
print(popt3[0],np.sqrt(pcov3[0][0]))
print(popt4[0],np.sqrt(pcov4[0][0]))
```

```
1.6763349021568728 0.006409295305640056
0.8409561567551102 0.0316421251478817
1.297419855567664 0.030969642686714167
0.6868677329886982 0.004469807368788089
```

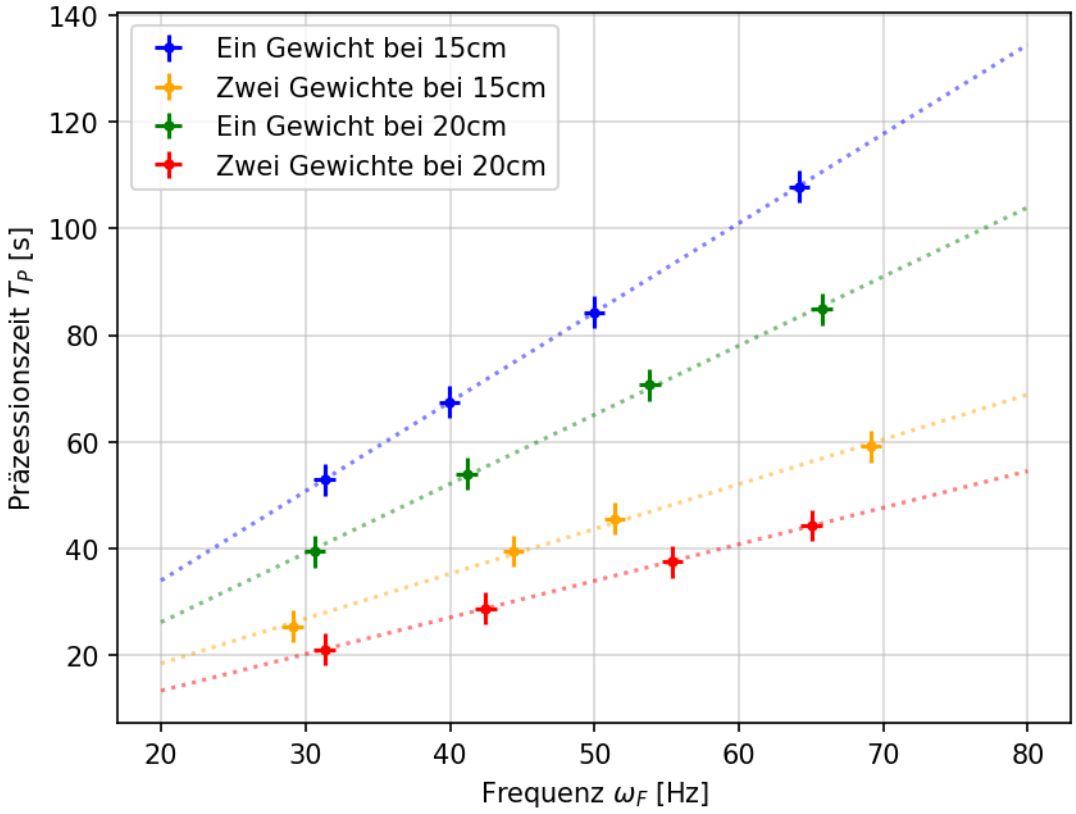
[12]:
```
x = np.linspace(20,80,10)

plt.figure(dpi=150)

plt.errorbar(baromega1,T_P1,fmt = ".", xerr= Delta_baromega1, yerr = Delta_T_P,␣
 ↪label = "Ein Gewicht bei 15cm", color = "blue")
plt.errorbar(baromega2,T_P2,fmt = ".", xerr= Delta_baromega2, yerr = Delta_T_P,␣
 ↪label = "Zwei Gewichte bei 15cm", color = "orange")
plt.errorbar(baromega3,T_P3,fmt = ".", xerr= Delta_baromega3, yerr = Delta_T_P,␣
 ↪label = "Ein Gewicht bei 20cm", color = "green")
plt.errorbar(baromega4,T_P4,fmt = ".", xerr= Delta_baromega4, yerr = Delta_T_P,␣
 ↪label = "Zwei Gewichte bei 20cm", color = "red")

plt.plot(x, lin(x, *popt1), color = "blue", alpha = 0.5, ls = "dotted")
plt.plot(x, lin(x, *popt2), color = "orange", alpha = 0.5, ls = "dotted")
plt.plot(x, lin(x, *popt3), color = "green", alpha = 0.5, ls = "dotted")
plt.plot(x, lin(x, *popt4), color = "red", alpha = 0.5, ls = "dotted")

plt.grid(alpha = 0.5)
plt.xlabel("Frequenz $\omega_F$ [Hz]")
plt.ylabel("Präzessionszeit $T_P$ [s]")
plt.legend()
plt.savefig(OUTPUT_DIRECTORY + "Plot3.png")
```



[13]:
```
#Berechnung von Iz
m1 = 9.85 / 1000 #kg
m2 = 19.7 / 1000 #kg
m3 = 9.85 / 1000 #kg
m4 = 19.7 / 1000 #kg

l1 = 0.15 #m
l2 = 0.15 #m
l3 = 0.20 #m
l4 = 0.20 #m

Delta_l = 0.3 / 100 #m

Iz1 = m1 * c.g * l1 * popt1[0] / (2 * np.pi)
Delta_Iz1 = m1 * c.g / (2*np.pi) * np.sqrt((popt1[0] * Delta_l)**2 + (l1 * np.
 ↪sqrt(pcov1[0][0]))**2)
Iz2 = m2 * c.g * l2 * popt2[0] / (2 * np.pi)
Delta_Iz2 = m2 * c.g / (2*np.pi) * np.sqrt((popt2[0] * Delta_l)**2 + (l2 * np.
 ↪sqrt(pcov2[0][0]))**2)
Iz3 = m3 * c.g * l3 * popt3[0] / (2 * np.pi)
```

```
Delta_Iz3 = m3 * c.g / (2*np.pi) * np.sqrt((popt3[0] * Delta_l)**2 + (l3 * np.
 ↪sqrt(pcov3[0][0]))**2)
Iz4 = m4 * c.g * l4 * popt4[0] / (2 * np.pi)
Delta_Iz4 = m4 * c.g / (2*np.pi) * np.sqrt((popt4[0] * Delta_l)**2 + (l4 * np.
 ↪sqrt(pcov4[0][0]))**2)

barIz = (Iz1 + Iz2 + Iz3 + Iz4) / 4
stdIz = np.std(np.array([Iz1,Iz2,Iz3,Iz4]))
Delta_barIz = np.sqrt(((Delta_Iz1 + Delta_Iz2 + Delta_Iz3 + Delta_Iz4) / 4)**2␣
 ↪+ (stdIz / 4)**2)
barIz*1e5, Delta_barIz*1e5
```

[13]:
```
(np.float64(398.934019146944), np.float64(11.22778103242067))
```

Aufgabe 4

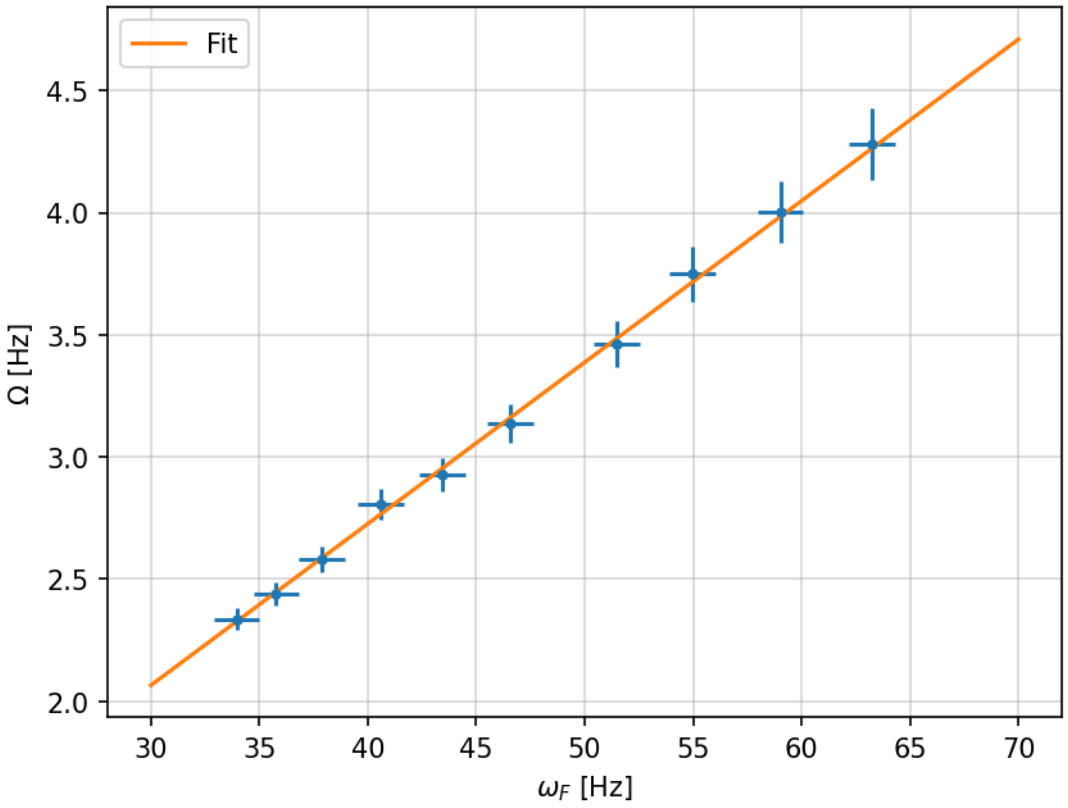
[14]:
```
#Messdaten b)
f, Delta_f = (np.array([604,563.7,524.8,491.5,444.7,414.7, 387.6, 361.7, 341.6,␣
 ↪324.2])/60,
              10/60)
omega, Delta_omega = (2 * np.pi * f,
                      2 * np.pi * Delta_f)
t, Delta_t = (np.array([14.68,15.70,16.76,18.15,20.04,21.48,22.40,24.36,25.
 ↪78,26.89]),
              0.5)
```

[15]:
```
Omega, Delta_Omega = (20 * np.pi / t,
                      20 * np.pi / t**2 * Delta_t)
```

[16]:
```
popt, pcov = curve_fit(lin, omega, Omega, sigma = Delta_Omega, absolute_sigma =␣
 ↪True)
popt[0], np.sqrt(pcov[0][0])
```

[16]:
```
(np.float64(0.06610055086774067), np.float64(0.0029056170024530955))
```

[17]:
```
x = np.linspace(30,70,100)
plt.figure(dpi = 150)
plt.errorbar(omega,Omega,xerr = Delta_omega, yerr = Delta_Omega, fmt = ".")
plt.plot(x, lin(x, *popt), label = "Fit")
plt.grid(alpha = 0.5, which="both")
plt.legend()
plt.xlabel("$\omega_F$ [Hz]")
plt.ylabel("$\Omega$ [Hz]")
plt.savefig(OUTPUT_DIRECTORY + "Plot4.png")
```



[18]:
```
#Ix bestimmen
I_x = barIz/(1-popt[0])
Delta_I_x = np.sqrt((Delta_barIz/(1-popt[0]))**2 + (barIz/(1-popt[0])**2 * np.
 ↪sqrt(pcov[0][0]))**2)
I_x * 1e5, Delta_I_x * 1e5
```

[18]:
```
(np.float64(427.17020501255996), np.float64(12.095710678376001))
```

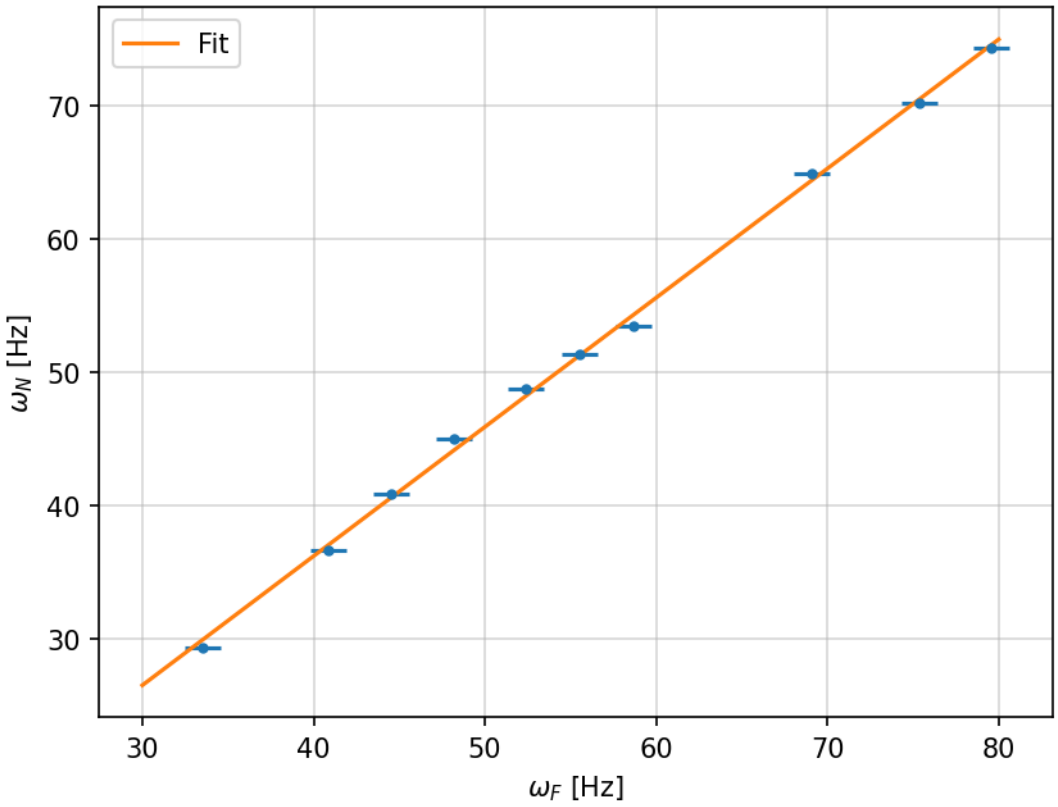
[19]:
```
#Messdaten c)
omega_F = 2 * np.pi * np.array([760,720,660,560,530,500,460,425,390,320]) / 60
omega_N = 2 * np.pi * np.array([710,670,620,510,490,465,430,390,350,280]) / 60
Delta_omega = 2 * np.pi * 10/60
```

[20]:
```
popt, pcov = curve_fit(lin, omega_F, omega_N, sigma = np.full_like(omega_N,␣
 ↪Delta_omega))
popt[0], np.sqrt(pcov[0][0])
```

[20]:
```
(np.float64(0.9687604308566956), np.float64(0.013104067991983635))
```

[21]:
```
x = np.linspace(30,80,100)
plt.figure(dpi = 150)
```

```
plt.errorbar(omega_F,omega_N,xerr = Delta_omega, fmt = ".")
plt.plot(x, lin(x, *popt), label = "Fit")
plt.grid(alpha = 0.5, which="both")
plt.legend()
plt.xlabel("$\omega_F$ [Hz]")
plt.ylabel("$\omega_N$ [Hz]")
plt.savefig(OUTPUT_DIRECTORY + "Plot5.png")
```



[22]:
```
I_x = barIz/popt[0]
Delta_I_x = np.sqrt((Delta_barIz/popt[0])**2 + (barIz/popt[0]**2 * np.
  ↪sqrt(pcov[0][0]))**2)
I_x * 1e5, Delta_I_x * 1e5
```

[22]: (np.float64(411.798424502287), np.float64(12.85893083619627))